

Title	反平行渦対による流体線の伸長促進 (乱流による輸送, 拡散, 混合の数理)
Author(s)	後藤, 晋; 木田, 重雄
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1339: 35-43
Issue Date	2003-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/43423
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

反平行渦対による流体線の伸長促進

後藤 晋 (Susumu GOTO)¹ 木田重雄 (Shigeo KIDA)

核融合研 (NIFS)

1 はじめに

常に同一の流体粒子の集合よりなる線および面を, それぞれ流体線および流体面 (あるいは物質線および物質面) とよぶ [1]. 言い換えれば, 流体線や流体面上の任意の点は, その場所での流体の速度によって受動的に移流される. つまり, 流体線や面上の点の時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{x}_m(t)$ は, 移流方程式,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_m(t), t) \quad (1)$$

に支配される. ここで $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は位置 \mathbf{x} における速度場であり, その時間発展は流体線や流体面の存在とは無関係に運動方程式と連続の式とによって記述される. 流体線や流体面は流れの様子を理解する道具として古くよりよく使われてきた. たとえば, Van Dyke [2] が編集した “An Album of Fluid Motion” の乱流の章には, 水素気泡を用いて近似的に可視化された流体線や流体面の変形の様子を示す写真が掲載されている. そこでは複雑に変形された流体線や流体面によって, 乱流の性質の一面が直感的に表現されている. この例に限らず, 我々はしばしば流体中に浮遊する物質の運動から流れの様子を想像している. つまり, 流体中の浮遊物質の運動の理解は流体の運動自身の理解につながる.

とくに流体線や面の変形や伸長は, 流れによる混合や拡散の問題と関わりが深い. なぜならば, 流体面 (流体面は流体線の集合と見なせる) は流体の2つの部分の境界に他ならず, その変形はその2つの部分の混合に強く関係するからである. 一般に乱れた流れによる混合や拡散は分子運動によるそれらよりもずっと強力であるので, 流体線や流体面の乱流による変形や伸長の問題は乱流混合, 拡散の基礎研究としてこれまでも盛んに研究されてきた. しかし乱流がいかにしてその強力な混合や拡散, あるいは流体線や面の複雑な変形や強い伸長を産み出しているかの詳細は全くと言ってよいほど未知のままである. 以下では乱流中に普遍的に存在する秩序渦構造に注目することによりこの難問に挑戦する.

¹goto@toki.theory.nifs.ac.jp

2 一様乱流中の流体線

流体線や流体面のように数学的に定義された概念を実験装置の中で忠実に実現することは容易ではない。この点においては、現在までのところ Reynolds 数に制限はあるものの、直接数値計算は有利である。そこで以下では、直接数値計算によって速度場とその中の流体線の運動とを同時に解いた結果を報告する。ここで、流体は非圧縮であると仮定し、流れ場は Navier-Stokes 方程式と連続の式とに支配されると考える。流れ場の統計的定常性を実現するために、大きな長さスケールに人工的な外力を作用させる。また、流れ場には周期境界条件を課す。動粘性係数を十分に小さくすることにより流れ場は統計的に一様等方かつ定常な乱流状態となる。この乱流によって移流される流体線を (1) に支配される点の集合で表現することによって追跡する。伸長によって流体線上の連続した 2 点間の距離が閾値（これは下の (3) で定義される Kolmogorov 長さ η の程度とする）よりも大きくなる毎に補間により 2 点間に新たな点を追加し常になめらかな流体線を追跡する。

Van Dyke のアルバムの写真を見るまでもなく容易に想像されるが、乱流中における流体線や流体面は非常に複雑に変形される。Taylor 長 Reynolds 数,

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{20}{3\nu\epsilon}} \mathcal{E} \quad (2)$$

が 57 および 122 の一様等方乱流中の初期に直線であった流体線の $0.4T$ 毎の変形の様子を図 1 に示す。ここで \mathcal{E} は流体の単位質量当たりの運動エネルギー、 ϵ はその単位時間当たりの散逸率、 ν は流体の動粘性係数、さらに $T = \mathcal{E}/\epsilon$ は渦旋回時間である。図中の箱は流れ場の周期境界を表し、また、小さい箱の大きさは Kolmogorov 長さ,

$$\eta = \epsilon^{-1/4} \nu^{3/4} \quad (3)$$

の 10 倍の大きさを表す。流体線の変形は主に η の程度で起こっていることが観察される。すなわち、一様乱流中のラグランジュ運動の最小スケールである Kolmogorov 長さの程度の運動が流体線の変形に強く寄与しているようである。実際、詳細な計算によると R_λ が 57 から 252 の乱流中で変形された（全長が積分長程度の）流体線の曲率の平均値は Reynolds 数に依らずに $0.1\eta^{-1}$ 程度であることがわかっている [3]。

ところで、乱流中の流体線のひとつの特徴はその全長が指数関数的に伸長されることである [4-6]。図 2 に $R_\lambda = 57, 84$ および 122 の乱流中での流体線の全長の時間発展を示す。時間発展はそのごく初期を除いて片対数グラフでほぼ直線となり、指数関数的伸長が観察される。また時刻を Kolmogorov 時間,

$$\tau_\eta = \epsilon^{-1/3} \nu^{2/3} \quad (4)$$

で規格化すると時間発展は Reynolds 数には依らないようである。この結果もまた流体線の変形や伸長がおもに Kolmogorov 長さの程度の非常に小さいスケールの流体運動によって支配されているという事を示唆している。

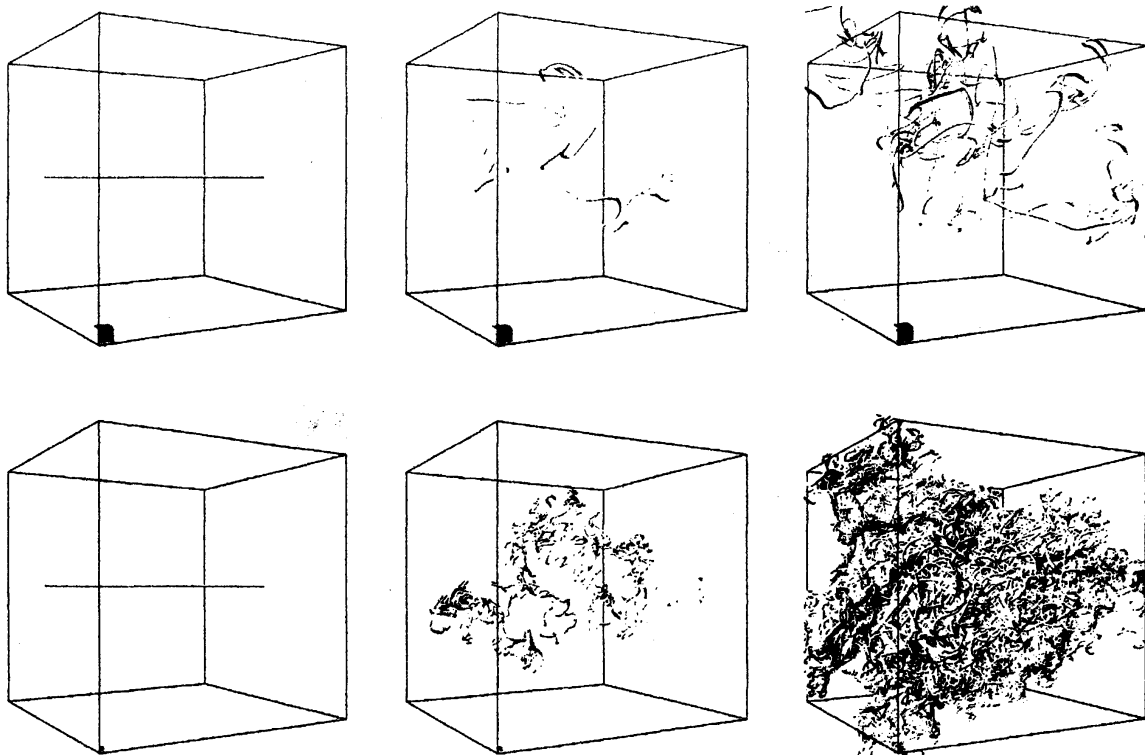


図 1: 流体線の時間発展. $t = 0, 0.4, 0.8T$. (上段) $R_\lambda = 57$. (下段) $R_\lambda = 122$. 大きな箱は流れ場の周期境界であり, 手前下の小さい箱の大きさはそれぞれの流れ場での 10η を表す.

3 管状渦構造

たとえば完全流体の運動は不生不滅である渦線の集団運動とも捕らえることができる. 粘性流体においても, 同様に流体中の「渦」構造に注目することにより, 流体運動の理解の見通しがよくなる可能性がある. 実際, 粘性が十分に小さい (高 Reynolds 数の) の流れにおいては, 管状の渦構造が普遍的に存在することが知られており, この渦構造の概念を用いて乱流の統計や動力学を理解しようという試みは現在盛んに行われている. 本研究の目標は, 乱流中の管状渦構造のはたらきのひとつとして流体線の強い伸長の起源を理解することである. 本題に入る前に, 一様等方乱流中での管状渦構造の性質を簡単にまとめておく.

3.1 単一の渦の特徴

一般に流体粒子の旋回運動は旋回中心付近での圧力の低下を伴う. そこで渦構造を同定する手法のひとつとして, 圧力の極小点を用いる手法が開発された [7]. この「低圧力の方法」では次の 2つの段階によって渦構造を同定する. まず, 圧力の極小点をなめらかにつないだものを「渦軸」として同定する. ここで圧力の極小点とは, 圧力がそのヘシアン の 2つの固有方向

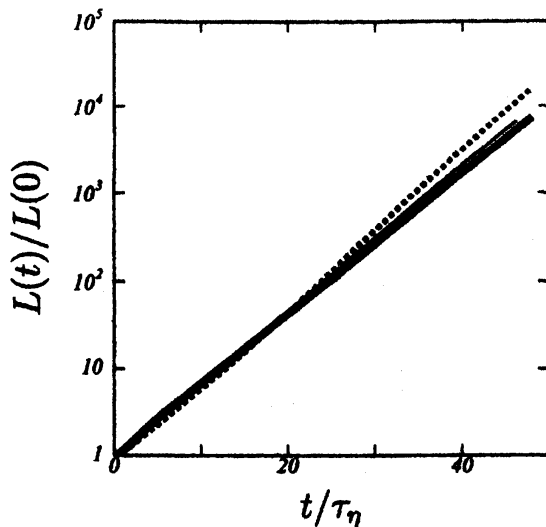


図 2: 流体線の全長の時間発展. 太い実線: $R_\lambda = 57$, 細い実線: 84, 点線: 122.

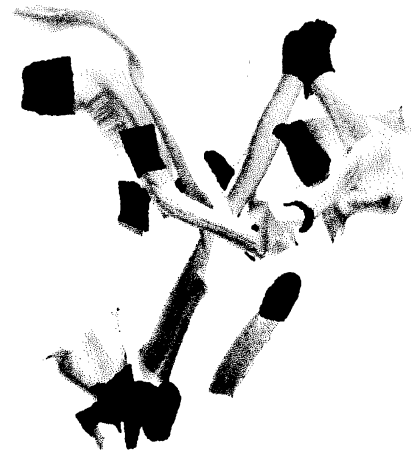


図 3: 低圧力渦の方法 [7] によって同定された秩序渦構造の集団. 渦中の渦度ベクトルは, 印をつけた端からつけていない端へ向く. $R_\lambda = 84$.

で張られる平面内において極小となる点のことである. 次に, 同定された渦軸それぞれの周囲の圧力が下に凸になっている領域をその「渦芯」と同定する. 図 3 に, この低圧力の方法によって同定された渦構造の集団 (渦芯を描いたもの) の一例を示す. 渦は細長い管状の構造をしていることがわかる. 実際 Reynolds 数を $R_\lambda = 84$ から 175 まで変化させて, 低圧力の方法で同定された渦の統計性質を調べた結果によれば, 渦芯の半径は Reynolds 数にほぼ依存せず Kolmogorov 長さ η の 5 倍程度, また, 渦芯回りの循環は動粘性係数の 100 倍程度である一方, 渦の長さは η のものから積分長程度のものまで存在することが知られている. つまり, 低圧力の方法で同定された管状の渦構造の断面方向は η と τ_η とで特徴づけられるが, 長さ方向はこれら乱流の最小スケールでは特徴づけられない. したがって流体線の変形や伸長が Kolmogorov 長さ程度の運動に支配されていることを思い出すと, それらは管状渦構造の断面方向の運動と強く関係していることが想像される.

3.2 渦の集団の特徴

図 3 に示した管状渦構造の集団を注意深く観察すると, それらが興味深い性質をもつことが分かる. 図中ではそれぞれの管状渦内の渦度ベクトルの方向を示すために, 渦度ベクトルの起点となる端に印をつけた. たとえば中心付近の「逆くの字」型の比較的長い渦に注目すると, 周りの比較的短い渦は, この渦と丁度反平行となるように揃う傾向にあることに気づく. それら以外にもこの図の中の多くの渦が反平行に揃っている. 実際, 管状渦の渦軸どうしの間の角度の余弦の確率密度関数 $P(\cos \theta)$ を調べると, この傾向が定量的にも確認できる. 渦軸間の距離によって条件づけされた $P(\cos \theta)$ を図 4 に示す. 2 通りの Reynolds 数の場合を示した

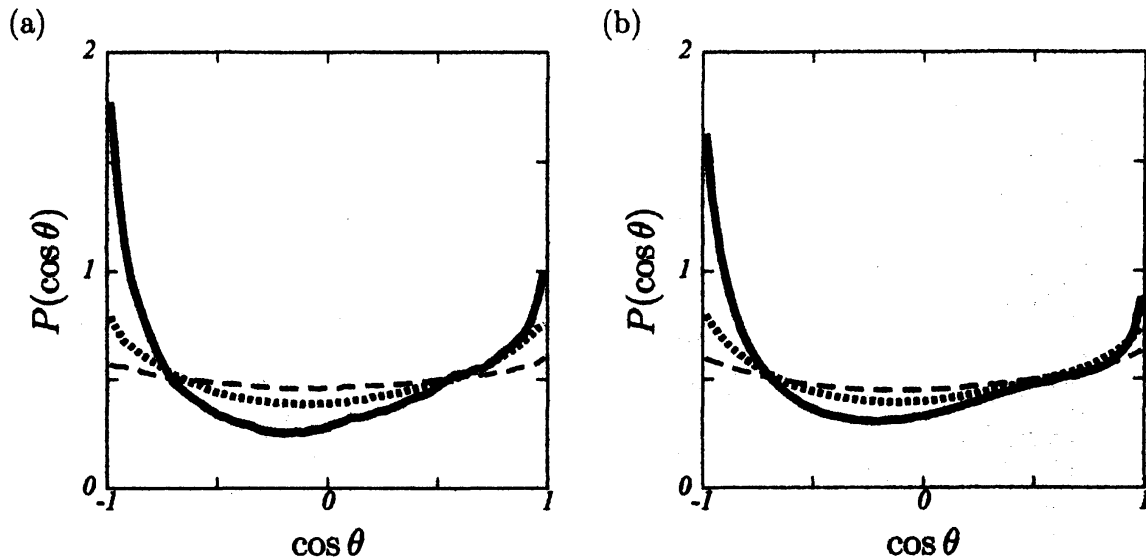


図 4: 渦対がなす角度 θ の余弦の確率密度関数. 余弦の符号は渦軸上の渦度ベクトルの方向に基づく. つまり $\cos \theta = 1$ が平行渦対に, -1 が反平行渦対にそれぞれ対応する. 実線, 距離 ℓ が 20η 以内の渦対. 点線, $20\eta < \ell < 40\eta$. 破線, $40\eta < \ell < 60\eta$. (a) $R_\lambda = 84$. (b) $R_\lambda = 175$.

が, 確率密度関数は Reynolds 数にはほとんど依らず, またいずれの場合も渦軸間の距離が比較的近い場合 (20η 以内) に反平行状態 ($\cos \theta = -1$) がもっとも確率が高いことを示している. もちろん, 渦の間隔が十分離れている場合 (40η 以上) には分布はほぼ等方的となる.

反平行渦対が誘導する流れの特徴を理解するために, Gauss 型の渦度分布をもつ無限に長い管状渦対の断面上での流れを図 5 に示す. 重要な特徴のひとつは, 反平行渦対とともに動く座標系で観測したときに, 渦対の間に 2 つの双曲型淀み点 (図中に \blacksquare で示した) が存在することである. 図 5(b) に示すようにこれらの双曲型淀み点の近傍では歪み度が大きな値をとっており, また, (a) の矢印群と (b) の線分群とを比較すれば分かるように, 渦対とともに動く座標系における流線は双曲型淀み点近傍で歪みテンソルの固有方向に一致する. 次節で見るように, この反平行渦対の間に存在する双曲型淀み点が流体線の伸長において重要な役割を果たす.

4 流体線の指数関数的伸長のメカニズム

前節で述べたように (第 3.1 節参照), 流体線の変形や伸長は秩序渦構造の断面構造と関係が深そうである. そこである秩序渦構造を適当に選び, その断面での流れ場の様子を図 6 に示す. 選ばれた渦は断面の中心に位置する. 図 6(a) の等高線は渦度の断面に垂直な成分を表す. 灰

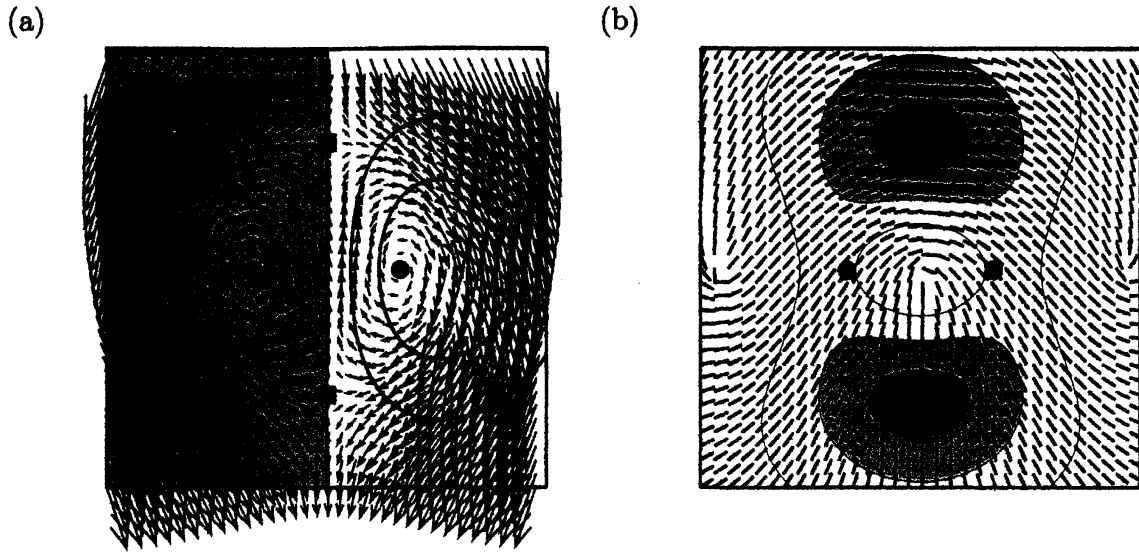


図 5: Gauss 型の渦度分布をもつ無限に長い管状渦の反平行対の断面構造. (a) 等高線は渦度の断面に垂直な成分, 矢印は渦の中心 (●) に対する相対速度. ■ はこの断面における双曲型淀み点. (b) 等高線は歪み度の強さ, 線分は変形速度テンソルの正の固有値に対応する固有ベクトルの方向.

色の部分が正の領域である. 選ばれた渦が中心に位置するのでその付近に正のピークが存在する. ところが図の右上には渦度の垂直成分が負の領域がある. 前節で述べたように (第 3.2 節参照) 秩序渦構造は互いに反平行に揃う傾向があるのでこれは驚くべきことではない. 図 6(a) の矢印は図の中心 (つまり渦) に対する相対速度場の断面と平行な成分を表す. この流れ場は渦対 (図中に ● で示す) が誘導する速度場として理解できる. また, 図 5 に示した理想的な流れと同様に, 渦対間に 2 つの双曲型淀み点 (図中に ■ で示す) が存在する. 図 6(b) には歪み度の大きさを等高線で示したが, ここでも 図 5 と同様に, 双曲型淀み点付近で大きな値をとることが分かる.

ところで注意しなければならないことは, 双曲型淀み点付近で歪み度が大きいからと言って必ずしもそこで流体線の伸長が活発におこるとは限らないということである. 流体線素 l の伸長率 γ は, 変形速度テンソル S を用いて,

$$\gamma \equiv \frac{d}{dt} \ln |l| = \frac{l \cdot S \cdot l}{|l|^2} \quad (5)$$

と表されるので, S の正の固有値に対応する固有ベクトルの方向を向いている流体線のみが効率よく伸長される. 逆に言えば, 運悪く負の固有値に対応する固有ベクトルの方向を向いている流体線は強く縮んでしまう. そこで乱流中に格子点と同数ほどの短い流体線素を流し, 考えている断面付近の線素のみを選びその断面上への正射影を図 6(c) に示す. 非常に興味深いことに渦対近傍の流体線素は, 渦対とともに動く座標系における流線 (図 6(a) の矢印) と平行に近いものが多いことに気づく. 定常に近い速度場においては流体線素の方向は次第に流線の方

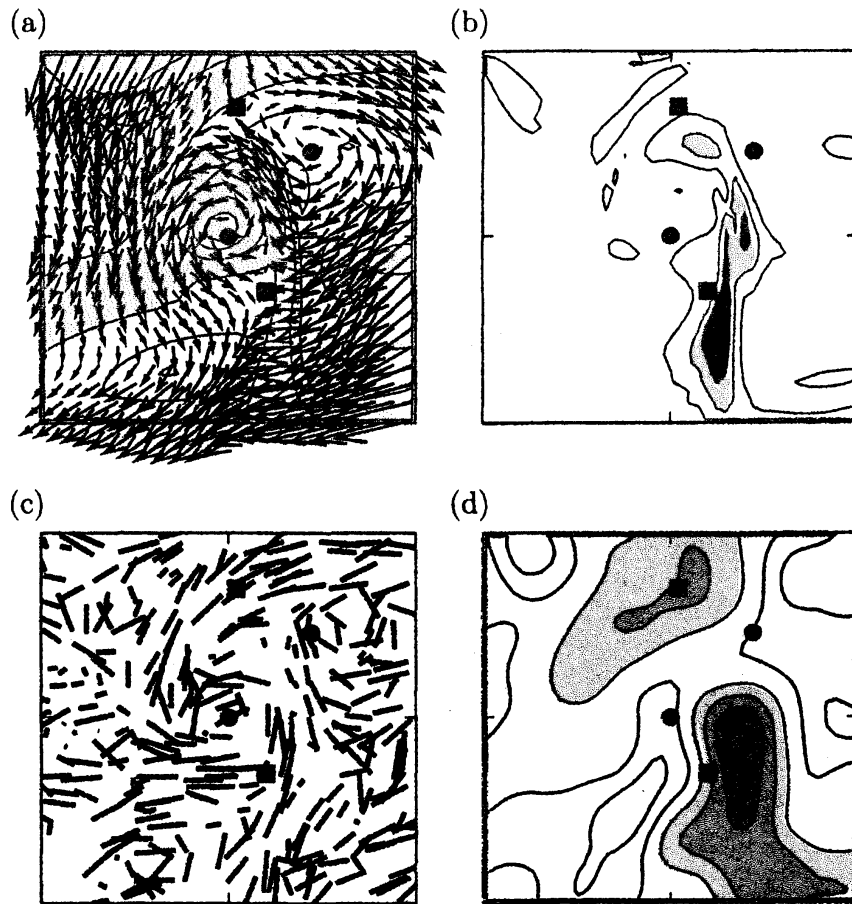


図 6: 秩序渦構造の断面での流れ場および流体の伸長の様子. 図の中心に渦の中心が存在する. $R_\lambda = 84$. 断面の一边の長さは 50η . (a) 等高線, 渦度の面に垂直な成分. 矢印, 図の中心に対する相対速度の面に平行な成分. ■が双曲型淀み点, ●が楕円型淀み点を表す. (b) 歪み場の強さの等高線. (c) 断面付近の流体線素の断面への正射影. (d) 断面付近の流体線の伸長率の等高線.

向に一致する傾向があるようである. このことは直感的には想像できるかもしれないが, 証明することは難しい. いずれにしても, 図 6(a) と (c) とを見比べる限り, 流体線の方法は渦の付近で流線の方法とよく一致している. ここで, 双曲型淀み点近傍で流線と変形速度テンソルの固有方向とが一致していることを思い出せば, 双曲型淀み点近傍で流体線の指数関数的な伸長が維持されていると考えられる. しかも, 双曲型淀み点近傍では歪み度が強いので, その伸長はとくに強い. 実際, 考えている断面近傍での流体線の伸長率の等高線を図 6(d) に示すが, 期待通り双曲型淀み点近傍で大きな値をとることが確認できる.

以上をまとめると, 乱流中には管状の秩序渦構造が存在し, それらは互いに反平行に揃う傾向がある. 反平行渦対はその間に, 渦対とともに動く断面において 2 つの双曲型の淀み点をもつ. この双曲型淀み点近傍付近では, 流線と変形速度テンソルの固有方向が揃っており, また,

歪み度（その固有値の絶対値）も大きな値をとる。一方、渦対近傍では流体線は渦対とともに動く断面上で流線と平行になる傾向がある。したがって、渦対とともに移流されている流体線は双曲型淀み点近傍で非常に強く伸長される。秩序渦構造は（Kolmogorov 時間と比べて）十分に長い時間その個性を保つので、この伸長過程も比較的長い時間続くと想像される。これが乱流による流体線の指数関数的伸長の物理機構である。

5 おわりに

ここで得られた「流体線の指数関数的伸長は Kolmogorov 長さ程度の渦によって産み出される」という結論自身は別段目新しくない。おそらく Batchelor がその先駆的論文 [1] の中で指数関数的な伸長を予言したときにも観念的にはそう理解していたはずである。しかし、この50年間の乱流研究（とくに直接数値計算）の発展を通じて、乱流中の小スケールには、Kolmogorov 時間と比べてずっと長い時間個性を持ち続ける秩序構造が歴然として存在し、それが図3に見られるような細長い管状構造であることが分かったことによりかえって事態は分かりにくくなってしまった。なぜならば、単純に単一の管状渦構造に巻き付く流体線の全長は、おそらく代数的にしか増大しないからである。ところが幸いなことに、管状渦構造は、完全流体中の渦糸 [8] と同様に、反平行に揃う傾向があることが明らかとなった（図4）。反平行渦は互いの誘導速度で移動するが、その移動速度で動く座標系から見たときに断面上で2つの双曲型淀み点をもつ。図6に明らかなように、この2つの淀み点付近で常に流体線の伸長が起こっている。つまり、「流体線の指数関数的伸長は Kolmogorov 長さの程度の半径をもつ管状渦の反平行な対によって産み出されている」のである。

本研究は文部科学省科学研究費特定領域研究（B）および若手研究（B）の部分的支援を受けた。

参考文献

- [1] G. K. Batchelor, "The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces," *Proc. Roy. Soc. London A*, **213** (1952) pp.349–366.
- [2] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press (1982)
- [3] S. Goto and S. Kida, "Enhanced Stretching of Material Lines by Antiparallel Vortex Pairs in Turbulence," *Fluid Dynamics Research* (2003) in press.
- [4] S. S. Girimaji and S. B. Pope, "Material-element deformation in isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.*, **220** (1990) pp.427–458.
- [5] S. Goto and S. Kida, "Multiplicative process of material line stretching by turbulence," *J. Turbulence*, **3** (2002) 017.

- [6] S. Kida and S. Goto, "Line statistics: Stretching rate of passive lines in turbulence," *Phys. Fluids*, **14** (2002) pp.352–361.
- [7] Miura, H. and Kida, S., "Identification of tubular vortices in turbulence," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **66** (1997) pp.1331–1334.
- [8] Siggia, E. D., "Collapse and amplification of a vortex filament," *Phys. Fluids* **28** (1985) pp.794–805.